「フーリエ解析と関数解析学」 読者の皆様へ

2001 年 9 月 1 日

本書の内容について，補足的な注意をしたいとおもいます.

1) (関数の台について) p.83 – p.86 において，$f \in L^2(\mathbf{R}^d)$ に対して，supp $(\mathcal{F}[f])$ を考えていますが，これは p.80 で定義された意味での supp $(\mathcal{F}[f])$ (緩増加超関数の台) です.

2) (記号について) l と ℓ は異なった記号として使ってます．特に p.232 ではご注意ください.

3) (ソボレフ空間の同値なノルムについて) ソボレフ空間のノルム $\|f\|_{2,m}$ に対して，定理 9.4 (p.181) では

$$p_m(f) = \left(\int_{\mathbf{R}^d} (1 + |\xi|^{2m}) |\mathcal{F}[f](\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}$$

を定義し，$C' p_m(f) \leqq \|f\|_{2,m} \leqq C p_m(f)$ を示してあります．ところで,

$$(1 + |\xi|^{2m}) \leqq (1 + |\xi|^2)^m \leqq C'_m (1 + |\xi|^{2m}), \qquad \xi \in \mathbf{R}^d$$

(C'_m は m に依存した正定数) となっています．したがって,

$$p'_m(f) = \left(\int_{\mathbf{R}^d} (1 + |\xi|^2)^m |\mathcal{F}[f](\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}$$

とすると，$p_m(f)^2 \leqq p'_m(f)^2 \leqq C'_m p_m(f)^2$ です．このことと定理 9.4 を合わせれば，m, d のみに依存した正定数 c'_m で

$$c'^{-1}_m \|f\|^2_{2,m} \leqq p'_m(f)^2 \leqq c'_m \|f\|^2_{2,m}, \quad f \in W^m(\mathbf{R}^d)$$

をみたすものがとれます．$\|f\|_{2,m}, p_m(f), p'_m(f)$ はみな同値なノルムを定めているわけです.

さて，p.183, p.192-p.193 では，どの同値なノルムで評価を行っても定数倍を除いて本質的な違いはないという意識から，どこでどの定義を使っているのか混乱している部分がありました．詳しくは正誤表をご覧ください.

4) （読者へのメッセージ） 現代的な実解析 (海外では調和解析と呼ばれることが多い) は，20 世紀半ば頃に現れた Calderón-Zygmund 理論，Littlewood-Paley 理論を二つの柱にして発展してきた分野です．特に 1990 年以降は，ウェーブレット理論，多様体ないしは距離測度空間上の解析と幾何，非線形偏微分方程式，また工学 (特に信号解析) に絡んだテーマも盛んに研究されています．実解析・調和解析は，さまざまな分野とも関連した純粋数学としても，また実用数学としてもアクティブに研究されている分野です．しかし，日本ではその研究者の数は多くなく，たいへん残念なことに特に若手研究者が非常に少ないというのが現状です．興味のある方は，ぜひこの分野で腕をふるわれることを希望してやみません．次回は本書を読んだ後に，さらに実解析・調和解析を深く知るには，どのような勉強をすればよいかを少し詳しく紹介します．次回更新予定は 11 月です.

なお **10 月 26 日 (金)14:30 〜 27 日 (土)** に『実解析への誘い』という非専門家向けの入門的な講演会があります．講師は宮地晶彦 (東京女子大)，小澤徹 (北大)，木上淳 (京大)，私の 4 人です．場所は中央大学理工学部 5 号館 5533 室，参加自由で無料です．ふるってご参会ください．詳しくは http://www.math.chuo-u.ac.jp/ENCwMATH をご覧ください.

これから実解析を専攻したい方へ

2001 年 12 月 3 日

実解析・調和解析を学びたいのだが，何を勉強すればよいかという質問をときどき受けます．ここでは一つの勉強の仕方を紹介したいと思います．

まず，ルベーグ積分を学んでください．ルベーグ積分は現代解析学の基礎をなしているものです．ルベーグ積分の本格的な入門書としてはたとえば

[I] 伊藤清三，ルベーグ積分入門，裳華房

があります．簡単な概説として

[A1] 新井仁之，測度,「現代数学の土壌」(上野，砂田，志賀編), 日本評論社，2000, 第二章

もあります．ルベーグ積分の意義を知りたい方はこれを参照していただければと思います．

ルベーグ積分をある程度学んだら，次にフーリエ解析を勉強する必要があります．少なくとも本書の PART 1 をマスターしておいた方が良いでしょう．PART 2 もできれば通読しておいてください．PART 3 は，必要に応じて学んでください．PART 1, PART 2 は独学でもよいですし，友人と輪読するというのも一つの方法だと思います．

これで準備は完了です．次に読む本としては，洋書ですが，下記の 2 冊が優れています：

[D] J. Duoandikoetxea, Fourier Analysis, Graduate Studies in Mathematics vol. 29, American Mathematical Society, 2001 (ISBN 0-8218-2172-5).

[S] E. M. Stein, Harmonic Analysis, Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals, Princeton University Press, 1993 (ISBN 0-691-03216-5).

[D] は本書 PART 1 (PART 2 も必要かもしれませんが）を学んでおけば十分に読みはじめることのできる本です．読みやすい本で，各章末にある Notes and further results では最新の話題にも触れられています．[D] を読了したら，Notes and further results で述べられているテーマのうち興味あるものを選んで，そこに挙げられている論文を直接読んでみるとよいでしょう．拡張できそうな定理があれば，拡張を試みてはどうでしょう．それは研究者としての第一歩です．重要な貢献ができるかもしれません．もちろん取るに足らないものという可能性もありますが．

[S] は本格的な専門書です．500 ページもありますが，この方面の座右の書です．長編小説を読むようなつもりで読み始めてみてはいかがでしょうか．

最後に実解析に関する読み物を挙げておきます．

[A2] 新井仁之，実解析，掛谷問題とコロナ問題 – 日本発の二つの問題 –, 数理科学 (サイエンス社) 2000 年 12 月号，pp. 56–65.

[A3] 新井仁之，無限の不思議 – 実解析学における無限 –, 数学のたのしみ (日本評論社) No.26 (2001), pp. 49–68.

どちらも実解析の有名な問題を紹介してあります．この他，

新井仁之，実解析学の発展，応用，そして今後の課題，2001 年度日本数学会年会企画特別講演アブストラクト，pp.81–90 (Web 版 http://www4.ocn.ne.jp/~arai/)

には，最近の話題が集めてあります．